14/11/2021

Είδαμε ότι το ΠΑΤ $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$

έχει ως μοναδική λύση

για $n=3$ (τύπος Kirchhoff):

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \big(t h(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\big)\, dS(y),$$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$

για $n=2$ (τύπος Poisson):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t\, D(g)\cdot(y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy$$

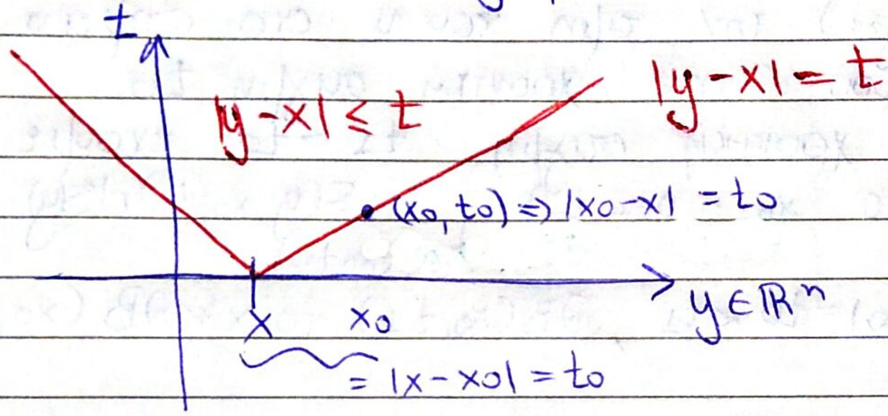
$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$

Βλέπουμε ότι για $n=3$ το $u(x,t)$ επηρεάζεται από τα δεδομένα g, h πάνω στην σφαίρα $\partial B(x,t) \subset \mathbb{R}^3$ ενώ για $n=2$ το $u(x,t)$ επηρρ. από τα δεδομένα g, h πάνω στον κυκλικό δίσκο $B(x,t) \subset \mathbb{R}^2$

[σημαντικό: και τις δύο φορές παίζει ρόλο η μπάλα $B(x,t)$ αλλά για $n=3$ μόνο το σύνορο της ενώ

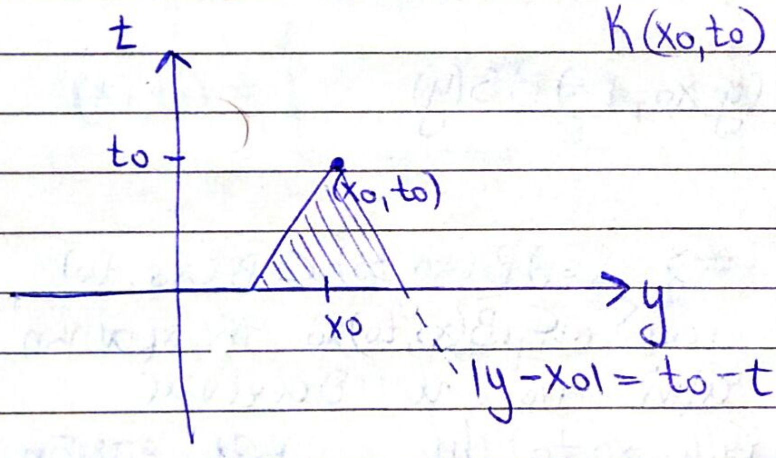
για $\underline{n=2}$ και το εσωτερικό της.]. Αυτό έχει την εξής ερμηνεία (αρχή του Huygens):
« διαταραχές σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ για $t=0$ μεταφέρονται στις περιττές διαστάσεις ($n=3$ εδώ) κατά μήκος ενός μετώπου κύματος, ενώ σε άρτιες διαστάσεις ($n=2$) συνεχίζουν να υφίστανται ακόμα και μετά την παρέλευση του κύματος. »

Γεωμετρικά: εισάγουμε δύο κώνους «δυικούς»:



$C(x) := \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : |y-x| \leq t\}$

Κώνος επιρροής (cone of influence)



$K(x_0,t_0) := \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : 0 < t \leq t_0,\ |y-x_0| \leq t_0\}$

$$u(x_0,t_0) = \int_{|y-x_0|=t_0} F(y,x_0,t_0)\, dS(y) \quad \boxed{n=3}$$

$$u(x_0,t_0) = \int_{|y-x_0|\leq t_0} G(y,x_0,t_0)\, dy \quad \boxed{n=2}$$

Με τα προηγούμενα σχήματα :

$$u(x_0,t_0) = \int_{|y-x_0|=t_0} \dots dS(y) = \int_{\partial B(x_0,t_0)} F(y,x_0,t_0)\, dS(y)$$

για (x_0,t_0) με $|x_0 - x| = t_0$ έχουμε $x \in \partial B(x_0,t_0)$
$\Longrightarrow$ η τιμή των δεδομένων g,h (τη χρονική στιγμή $t=0$) στο χωρικό σημείο x, λαμβάνεται υπόψης (επηρεάζει) την τιμή του u στο σημείο x_0 του χώρου την χρονική στιγμή t_0.
Όμως την χρονική στιγμή $t_1 > t_0$ έχουμε στο ίδιο σημείο x_0 : $u(x_0,t_1) = \int_{\partial B(x_0,t_1)} F(y,x_0,t_0)\, dS(y)$
και αφού $|x - x_0| = t_0 < t_1$, $\partial B(x_0,t_1)$ το $x \notin \partial B(x_0,t_1)$

Αντίθετα για $n=2$:

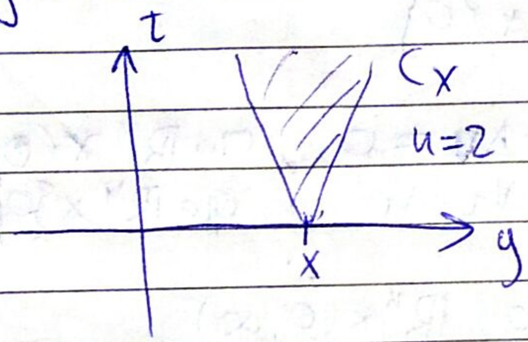
$$u(x_0,t_0) = \int_{\overline{B}(x_0,t_0)} G(y,x_0,t_0)\, dS(y)$$

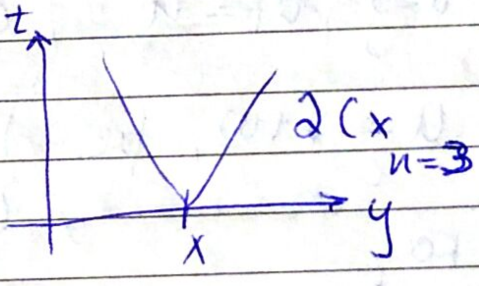
αφενός $|x-x_0| = t_0 \Rightarrow x \in \partial B(x_0,t_0) \subset \overline{B}(x_0,t_0)$
αλλά επίσης στο ίδιο σημείο x_0 τη χρονική στιγμή $t_1 > t_0$ η τιμή της u θα είναι
$u(x_0,t_1) = \int_{\overline{B}(x_0,t_1)} G(y,x_0,t_0)\, dy$ και επειδή
$|x - x_0| = t_0 < t_1 \Rightarrow x \in B(x_0,t_1) \supset \overline{B}(x_0,t_0)$, τα αρχικά δεδομένα g,h στο σημείο x συνεχίζουν να επηρεάζουν το u στο σημείο x [συνεχίζουμε να ακούμε $\forall t > t_0$, κάτι που συνέβει στο $t=0$ στο x]
[ακούμε ένα δεδομένο που διαμορφώθηκε (συνέβη) την χρ. στιγμή $t=0$ στο σημείο x, μόνο

την χρονική στιγμή $t=t_0$, ενώ δεν το ακούμε για $t \neq t_0$, ούτε πριν ούτε μετά $\Rightarrow$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι 1 :

$$\frac{|x-x_0|}{t_0} = 1 \Big]$$

Αυτή η ερμηνεία είναι μέσω του κώνου επιρροής $C(x)$, δηλαδή μας λέει σε ποια σημεία του χωροχρόνου $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ επηρεάζει το δεδομένο στο $(x,0)$ τη λύση της κυματικής εξίσωσης.



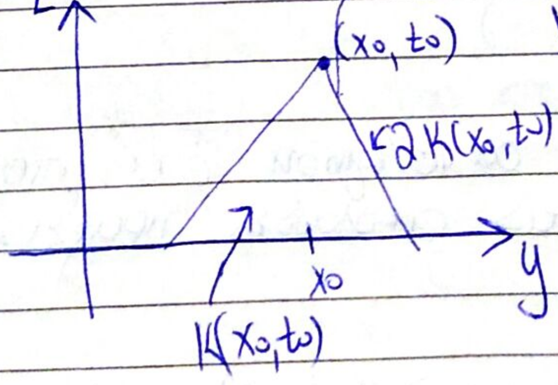


Δυϊκή περιγραφή:

$$u(x_0,t_0) = \int_{|y-x_0|=t_0} F(y,x_0,t_0)\, dS(y) \quad (n=3)$$

$$u(x_0,t_0) = \int_{|y-x_0|\leq t_0} G(y,x_0,t_0)\, dy \quad (n=2)$$

μέσω του κώνου εξάρτησης



$$K(x_0,t_0) = \{(y,t) : 0 \leq t \leq t_0,\ |y-x_0| \leq t_0\}$$

Για $n=3$ η τιμή στο (x_0,t_0) εξαρτάται μόνο από τα x για τα οποία $|x-x_0|=t_0$, ενώ για $n=2$ εξαρτάται από όλα τα x για τα οποία $|x-x_0|\le t_0$.

Το μη ομογενές πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t=h, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

$u=v+w$, με $\begin{cases} v_{tt}-\Delta v=0, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ v=g,\ v_t=h, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$

και

$$\begin{cases} w_{tt}-\Delta w=0, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ w=0,\ w_t=0, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times\{0\}. \end{cases}$$

όπου $w(x,t)=\int_0^t w(x,t;s)\,ds$ με

$w(\cdot,\cdot;s)$ λύση του

$$\begin{cases} w_{tt}(\cdot,\cdot;s)-\Delta w(\cdot,\cdot;s), & \text{στο } \mathbb{R}^n\times(\ ,\infty) \\ w(\cdot,s;s)=0,\ w(\cdot,s;s)=f(\cdot,s), & \text{στο } \mathbb{R}^n\times\{s\} \end{cases}$$

(Αρχή του Duhamel)

[formally, δηλ. χωρίς αιτιολόγηση ότι μπορούμε πράγματι να κάνουμε τις ακόλουθες πράξεις/υπολογισμούς]

$$w(x,t)=\int_0^t w(x,t;s)\,ds \Rightarrow w_t(x,t)=\underbrace{w(x,t;t)}_{=0}+$$

$$+\int_0^t w_t(x,t;s)\,ds \Longrightarrow$$

$$w_{tt}(x,t) = \underbrace{w_t(x,t;t)}_{=f(x,t)} + \int_0^t \underbrace{w_{tt}(x,t;s)}_{=\Delta w(x,t;s)}\,ds$$

$$= \Delta w(x,t)$$

και $w(x,0) = \int_0^0 w(x,t;s)\,ds = 0$

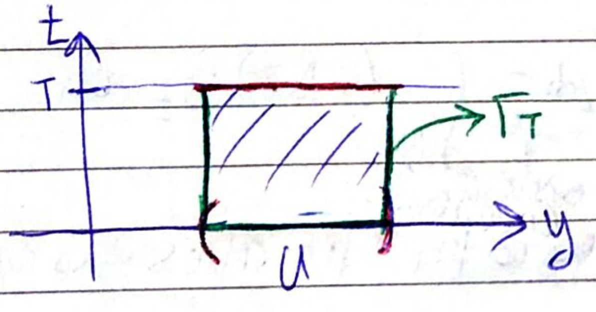
$$w_t(x,0) = \int_0^0 w_t(x,t;s)\,dS = 0 \;]$$

Μέθοδοι Ενέργειας για την κυματική εξίσωση:
$U \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο ανοιχτό με ∂U λείο,

$U_T := U \times (0,T]$, $\Gamma_T = \bar{U}_T \setminus U_T$, $T>0$

$u_{tt} - \Delta u = f$, στο U_T, $u=g$ στο Γ_T, $u_t = h$, στο $U \times \{0\}$ (ήταν αρχικά)

(αρχικά και συνοριακά δεδομένα (Dirichlet))



Μοναδικότητα λύσης: $\exists$ το πολύ μια λύση

Απόδειξη: Έστω ότι $\exists$ δύο λύσεις u και $\bar{u}$ τότε $w := u - \bar{u}$
$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 \\ w = 0, \text{ στο } \Gamma_T \\ w_t = 0, \text{ στο } U \times \{0\} \end{cases}$$

Θ.ν.δ.ο. $w \equiv 0$

Ορίζουμε την ενέργεια:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_U w_t^2 + |D_x w|^2)\,dx \quad , \quad 0 \le t \le T$$

$$=: K(t) + V(t)$$

(κινητική + δυναμική ενέργεια)

και δείχνουμε ότι αυτή παραμένει σταθερή (συντηρητικό σύστημα, διαφορά με εξίσωση θερμότητας) με συνέπεια $E(t) = \underbrace{E(0)}_{=0}$, $\forall t \in [0,T]$ λόγω των αρχικών δεδομένων

$$\Rightarrow E(t) = 0 \ , \ \forall t \in [0,T] \Rightarrow w_t(x,t) = 0, \ \forall x \in U.$$

$$\Rightarrow w\ (x,t) = \underbrace{w(x,0)}_{=0}, \ \forall t \in [0,T] \ \forall x \in U$$

Πράγματι, $\dot{E}(t) = \frac{1}{2}\int_U 2w_t \cdot w_{tt} + 2Dw \cdot Dw_t)\,dx =$

$$\int_U w_t \cdot w_{tt} + \int_U Dw \cdot Dw_t dx = \int_U (-\Delta w)\, w_t \, dx$$

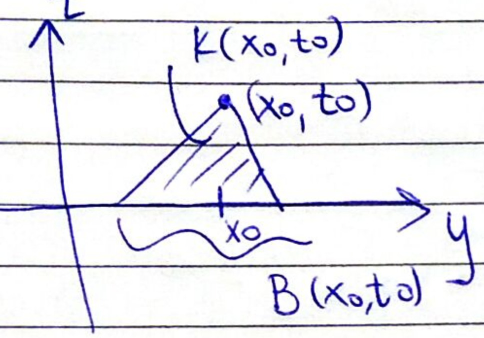
ολοκλήρωση κατά μέρη με τιμές = 0 στο ∂U

$$\Rightarrow \dot{E}(t) = \int_U w_t \underbrace{(w_{tt} - \Delta w)}_{=0}\, dx = 0 \Rightarrow$$

$E(t) = E(0)$. ☒

Με μέθοδο ενέργειας αποδεικνύεται και η πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης (του σήματος = της πληροφορίας u).

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $u \equiv u_t \equiv 0$ στο $B(x_0,t_0)\times\{t=0\}$ για το $u_{tt}-\Delta u=0$ στο $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$



Τότε $u\equiv 0$ στο $K(x_0,t_0)$

[$\Longrightarrow$ αλλαγές στα αρχικά δεδομένα εκτός του $B(x_0,t_0)$, δεν επηρεάζουν την λύση u στο $K(x_0,t_0)$

$\Longrightarrow$ πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης.]

<u>Απόδειξη:</u> (Βλέπε Evans σελ. 84)

$$e(t)=\frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)} F(x,t)\,dx$$

$$\Longrightarrow \dot{e}(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)\,dx+$$

$$\underbrace{\frac{d}{d(t_0-t)}\int \overbrace{G(x)}^{=F(x,t)}\,dx\cdot\underbrace{\frac{d(t_0-t)}{dt}}_{=1}}_{\text{βλ. Appendix}},\quad =\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}G(x)\,dS(x)$$

$$=\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}F(x,t)\,dS(x)$$

(*) εδώ δεν μας ενδιαφέρει η «εσωτερική» παράγωγος αλλά η παράγωγος ως προς την μεταβλητή του συνόρου.